1. Вопросы по курсу «Анализ риска». 2015/16 у.г.

II. *Вопросы по теории вероятностей.*

1. Случайная величина (с. в.).

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \xi: \Omega \to \mathbb{R}$
$\forall B \in \mathcal{B}$: $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ (свойство измеримости)
$\xi^{-1}(B) = \{w \in \Omega: \xi(w) \in B\}$

2. Независимые одинаково распределенные с. в.

ξ_1, ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины, определенные на пр-ве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, если
$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$: $\mathbb{P}(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2) = \mathbb{P}(\xi_1 \in B_1) * \mathbb{P}(\xi_2 \in B_2)$ (независимость)
и
$\forall B \in \mathcal{B}$: $\mathbb{P}(\xi_1 \in B) = \mathbb{P}(\xi_2 \in B)$ (одинаково распределенные)

Далее, НОРСВ – независимые одинаково распределенные случайные величины

3. Функция распределения. Основные свойства ф. р.

$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x), x \in \mathbb{R}$
Свойства:

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} F_\xi(x) = 0, \lim\limits_{x\to +\infty} F_\xi(x) = 1$ – то есть неотрицательна
2) Неубывающая: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \ F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$
3) Непрерывна слева: $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$
   (Если $F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \le x)$, то непрерывна справа).

4. Математическое ожидание (в общем, дискретном и абс. непр. случаях).

ξ – случайная величина

1) $E\xi = \int_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)\mathbb{P}(dw) = \int_{\omega\in\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$
   $E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF_\xi(x)$ если интегралы существуют

2) $E\xi = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \mathbb{P}(\xi = x_i)$ – если ряд сходится абсолютно
3) $E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)dx$ – если сходится, $p(x)$ - плотность

5. Квантиль распределения. Медиана.

$p \in (0,1), u_p$ – р-квантиль $F_\xi(x)$, если $\begin{cases} F_\xi(u_p - 0) \le p \\ F_\xi(u_p + 0) \ge p \end{cases}$
Медиана – это квантиль порядка 1/2

6. Отношение Ляпунова. Классическая дробь Ляпунова.

$L^3(\xi) = \frac{E|\xi|^3}{(E\xi^2)^{\frac{3}{2}}}, E|\xi|^3 < \infty, \xi$ – невырожденная в 0 случайная величина.

$L_0^3(\xi) = \frac{E|\xi - E\xi|^3}{(D\xi)^{\frac{3}{2}}}, E|\xi|^3 < \infty, \xi$ – невырожденная случайная величина.

7. **Вероятность.**

Пусть задано измеримое пространство (по сути модель) $(\Omega, \mathcal{A})$, $\mathbb{P}: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$

Свойства:

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2) $\mathbb{P}(A) \geq 0, A \in \mathcal{A}$
3) Сигма-аддитивность:
   $\forall A_i \in \mathcal{A}$: $A_i A_j = \emptyset, i \neq j$: $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

8. **Распределение Пуассона (плотность, характеристическая функция).**

$\xi \sim Pois(\lambda), \lambda > 0$

$\mathbb{P}(\xi = \mathrm{k}) = p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k = 0,1, \ldots$

$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x \in \{0\} \cup \mathbb{N} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$ относительно считающей меры на $\{0\} \cup \mathbb{N}$ ИЛИ плотности относительно меры Лебега не существует, т.к. распределение дискретное

$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

9. **Нормальное распределение (плотность, характеристическая функция).**

$\xi \sim N(\alpha, \sigma^2)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$$

$\varphi(t) = e^{it\alpha - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

10. **Экспоненциальное распределение (плотность, хар. функция).**

$\xi \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$

$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{(-\lambda x)}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ или $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x \geq 0)$ (с индикатором)

$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_0^{+\infty} e^{itx} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$

11. **Классическое неравенство Берри-Эссеена.**

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ - НОРСВ, $E(|\xi_1|^3) < \infty, D\xi_1 > 0$

$\sup\limits_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C_{\text{Ш-Т}} L_0^3(\xi_1)}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Phi(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона

$C_{\text{Ш−Т}}$ – константа Шевцовой-Тюрина

12. **Характеристическая функция (в общем, дискретном и абс. непр. случаях).**

1) $Ee^{it\xi} = \int_{\omega \in \Omega} e^{it\xi(\omega)} \mathbb{P}(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\xi(x)$

2) Пусть ξ имеет распределение $\frac{x_1 \; x_2 \dots}{p_1 \; p_2 \dots}$, $Ee^{it\xi} = \sum_k e^{itx_k} p_k$
3) $p(x)$ – плотность: $Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{itx} dx$

13.Случайный процесс (две сущности).

$\xi(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T$

1) $(\Omega, \mathcal{F}), (M_T, \mathcal{F}_{M_T})$, M_T – множество функций, определенных на Т, $\mathcal{F}_{M_T}$ – сигма-алгебра над множеством M_T
Случайный процесс $\xi: \Omega \to \mathrm{M_T}$, такое что $\forall L \in \mathcal{F}_{M_T}: \{\omega \mid \xi(\omega) \in L\} \in \mathcal{F}$

2) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
Случайный процесс ξ – параметризованное семейство случайных величин $\{\xi(\omega, t), t \in T\}$, заданных на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

14.Борелевская сигма-алгебра.

1) Минимальная сигма-алгебра, включающая все открытые интервалы (подмножества) некоторого множества, для которого она определена

2) Сигма-алгебра, порожденная множеством всевозможных открытых интервалов (множеств) данного множества

15.Безгранично делимое распределение (два определения).

1) Распределение называется безгранично делимым, если его характеристическая функция $f(x) = \left(g_n(x)\right)^n, \forall x, \forall n \in \mathbb{N}$, где $g_n(x)$ – некоторая характеристическая функция $\forall n \in \mathbb{N}$

2) Случайная величина ξ имеет безгранично делимое распределение, если $\forall n \in \mathbb{N}$: $\xi =^d \sum_{i=1}^{n} \xi_{i,n}$ (по распределению), $\xi_{i,n}$ – НОРСВ $\forall n \in \mathbb{N}$

16.Неравенство Иенсена.

$f(x)$ – выпуклая вниз (вверх), $\exists\, Ef(\xi), \exists\, E\xi: Ef(\xi) \geq (\leq) f(E\xi)$

17.Формула полной вероятности (ФПВ).

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
$B_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, \dots)$: $B_i B_j = \emptyset, i \neq j$
$A \subset \bigcup_{i=1} B_i$, $\mathbb{P}(B_i) > 0\ \forall i$
$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1} \mathbb{P}(A \cap B_i)$
Если $\Omega = \bigcup_i B_i$, то $\{B_i\}$ – полная группа событий

18.Аналог ФПВ для математического ожидания.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
ξ – случайная величина, $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j, \mathbb{P}(B_i) > 0, \bigcup_i B_i = \Omega$ и $\exists\, E\xi$, тогда $E\xi = \sum_i E(\xi|B_i)\mathbb{P}(B_i)$

19.Плотность распределения.

1) $F(x)$ – абсолютно непрерывная функция распределения,

если $\exists\, f(x) \geq 0$:
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy, \forall x \in \mathbb{R}, f(y)$ – плотность распределения

2) Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - измеримое пространство, μ – сигма-конечная мера, $\mathbb{P}$ – неотрицательная мера, $\mathbb{P} \ll \mu, \forall A \in \mathcal{F}$

   $\exists\, f(x)$: $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)d\mu(x), f(x)$ – плотность распределения относительно доминирующей меры μ – лучше выкинуть вообще эту часть, так как предел интегрирования по событию, а подинтегр. функц. от действ аргумента, может придраться

20.n-кратная свертка ф.р.

$F(x)$ – функция распределения
n-кратная свертка $F(x) - F^{*n}(x)$:
$F^{*n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^{*(n-1)}(x-y)dF(y)$
$F^{(*1)}(x) = F(x)$
$F^{*0}(x) -$ функция распределения, имеющая единичный скачок в 0 (вырожденная в 0).

III. *Вопросы по статическим моделям.*

1. Распределение риска.

Функция распределения суммарного иска называется распределением риска.
x_i – выплаты i-ому клиенту (неотрицательная случайная величина)
$X_i \sim F_i(x)$ – функция распределения
$X = x_1 + \dots + x_N$ – суммарный иск (N – число полисов в портфеле)
$F(x) = P(X < x)$

2. Принцип эквивалентности.

Когда полисы продаются по чистой цене (рисковой премии): $\mu_n = \frac{\mu}{n}, \mu = EX < \infty$

3. Нагрузка (рисковая надбавка).

ϑ_i – нагрузка (разность между страховой премией и чистой ценой). Тогда реальная цена полиса: $\mu_n + \nu_i$

4. Общий вид конечного капитала страховщика.

$Y = R + \mu - X,$
$R = S + \sum_{i=1}^{n} \nu_i$, R – свободный резерв, $S -$ начальный капитал
$R + \mu$ – положительная часть капитала страховщика

5. Рисковая ситуация.

Рисковая ситуация - $(R, F(x))$

Возможно не надо:
$G(y) = P(Y < y) = P(R + \mu - X < y) = 1 - F(R + \mu - y + 0)$

6. Функция полезности.

$u(y)$ – действительная функция действительного аргумента, характеризующая удовлетворение индивида от обладания некоторой суммой средств
Свойства:
1) Неубывающая (первый принцип стохастического доминирования)
2) Функция полезности инвариантна относительно сдвига и растяжения
3) В зоне низких капиталов ф.п. выпуклая вниз, в зоне высоких – выпуклая вверх.

7. Ожидаемая полезность.

$U(Y) = Eu(Y) < \infty$

8. Необходимые условия возможности страхования в терминах ожидаемой полезности.

Начальные данные:

	Страховщик	*Страхователь*
Начальный капитал	S	I

Функция полезности	$u(y)$	$\bar{u}(y)$
Индивидуальный иск	X = x_1+…x_n	x_i
	D = n*d *Суммарная премия по всему портфелю*	d *Цена полиса*

Необходимые условия:

1. $\mathrm{E}u(S + D - x) \geq u(S)$ – условие того, что страховщик согласен страховать
2. $\bar{u}(I - d) \geq \ \mathrm{E}\bar{u}(I - x_i)$ - условие того, что страхователь согласен страховаться

Дополнительно (скорее всего не надо в ответ):

Пусть D* - минимально возможная суммарная премия, при которой достигается равенство в (1)
d* - максимальное значение при котором достигается равенство в (2).
Тогда если D* <= nd* => страхование возможно.

9. Отвращение к риску. Склонность к риску.

Отвращение к риску: $d^* \geq EX_1$,$u(x)$ – выпукла вверх
Склонность к риску: $d^* \leq EX_1$, $u(x)$ – выпукла вниз

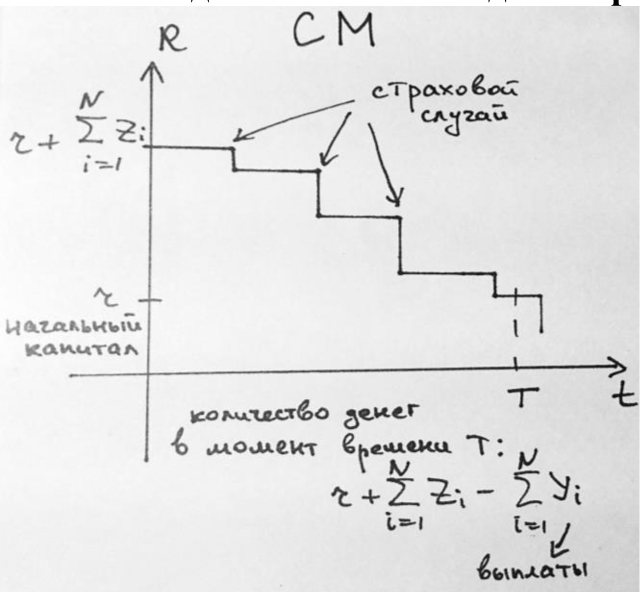
10. Модель индивидуального риска.

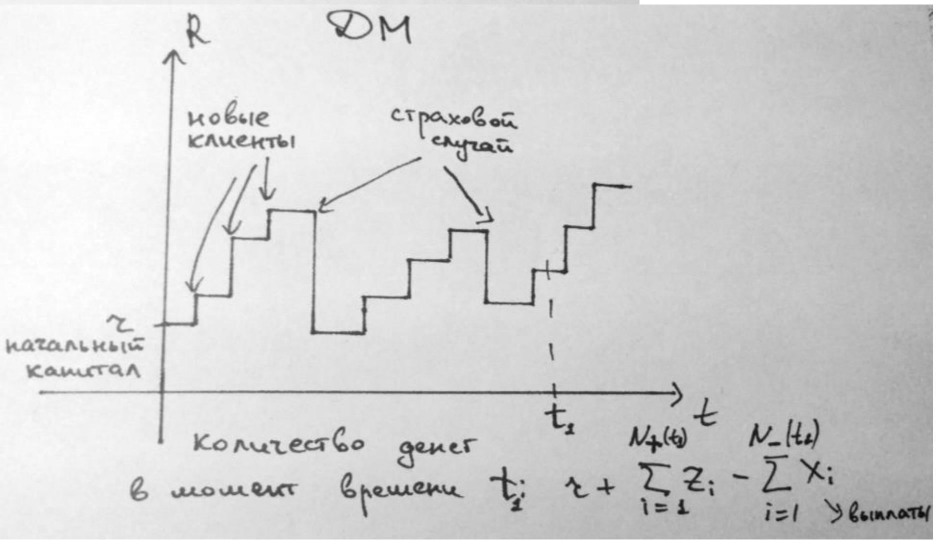
(статическая модель страхования) описывает ситуацию, в которой рассматривается совокупность объектов страхования (страховой портфель), сформированная одновременно. Страховые премии собраны в момент формирования портфеля. Срок действия всех договоров страхования одинаков. В течение этого срока происходят страховые события, приводящие к страховым выплатам (искам).

11. Модель коллективного риска.

(динамическая модель страхования) предполагает, что договоры страхования заключаются страховщиком в момент времени, образующий некоторый случайный процесс. Каждый из договоров имеет свою собственную длительность и в течение времени действия этого договора могут происходить страховые события, приводящие к убыткам страховой компании (страховщика). Такая модель может рассматриваться как на конечном, так и на бесконечном интервале времени.

12. Типичные графики изменения капитала в статической и динамической модели страхования.





13. Вероятность разорения в статической модели страхования.

$R = r + \sum_{i=1}^{N} Z_i - \sum_{i=1}^{N} Y_i -$ остаточный капитал, где r – начальный капитал, Z_i – премии (неслуч), Y_i – индивидуальные иски (НОРСВ), N – объем портфеля.

Если $Z_i = Z$, то вероятность НЕразорения: $P\left(r + NZ - \sum_{i=1}^{N} Y_i > 0\right)$
Вероятность разорения - $P(R < 0) = P\left(r + NZ - \sum_{i=1}^{N} Y_i < 0\right)$

14. Факторизационная модель. Страховая сумма. Относительный иск.

$Y_i = X_i * S_i$ (Y_i – индивидуальный иск) X_i, S_i – независимые сл. в.
S_i – страховая сумма (максимальная сумма индивидуального иска)
$X_i = \frac{Y_i}{S_i}$ – относительный иск (доля страховой суммы, которую выплачиваем клиенту в качестве индивидуального иска).

15. Ставка премии (страховая ставка).

$z \in [0, 1]$ – ставка – доля страховой суммы, которая будет взиматься с клиента в качестве премии.
$Z_i = z * S_i$ – премия

16. Принцип умеренности. Принцип достаточности. Оптимальная ставка премии.

Условия:

1) $z \geq EX_i$
2) $P(R \geq 0) \geq Q \sim 1$

Достаточная ставка премии – ставка премии, удовлетворяющая условия 1) и 2)
Умеренная ставка премии – минимальная в некотором классе
Оптимальная ставка премии – ставка, одновременно удовлетворяющая условиям умеренности и достаточности.
Оптимальные ставки называются оптимально допустимыми

17. Модель с конечным источником.

N' - число потенциальных страхователей.
$\eta_k = \begin{cases} 1, S_k - \text{вероятность заключения договора} \\ 0, 1 - S_k - \text{вероятность незаключения} \end{cases}$ - индикатор, заключит ли клиент договор
$N = \sum_{k=1}^{N\prime} \eta_k$ – объем портфеля

18. Решетчатое распределение.

Распределение является решетчатым, если оно сосредоточено на некотором множестве точек (решетке):
$\mathcal{L} = \{\alpha + \eta k, k \in \mathbb{Z}\}$
$P(\xi \in \mathcal{L}) = 1$
η – шаг решетки, если распределение не сосредоточено ни на одной подрешетке решетки $\mathcal{L}$

19. Иррационально-решетчатое распределение. Рационально-решетчатое распределение.

Распределение, сосредоточенное на решетке $\mathcal{L}$, шаг которого η не соизмерим с любой из точек решетки α $(\alpha \neq 0)$, называется иррационально решетчатым.
Если шаг решетки η соизмерим с α, то распределение называется рационально решетчатым

20. Гарантированная оценка для оптимальной ставки премии.

$z' \in [0,1]$ – гарантированная оценка оптимальной ставки премии: $z_0 \leq z'\ \forall N$ (начиная с некоторого). z_0 – оптимальная ставка

Как говорил Кудрявцев на последней лекции

Гарантированной ставкой премии называется число $z' \in [0,1]$, такое что для любого объема портфеля, начиная с некоторого выполнено $z_0 \leq z'$.